Kapitola 2: **MOCNINNÉ ŘADY**

Kontrolní otázky:

1. Definujte pojmy **poloměr konvergence, obor konvergence** a **obor absolutní konvergence** mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.
2. Napište obecný tvar **mocninné řady**, **Taylorovy řady** a **Maclaurinovy řady** a vysvětlete význam jednotlivých symbolů, které v zápisech použijete.

Příklady:

1. Určete poloměr r, obor konvergence (OK) a obor absolutní konvergence (OAK) mocninné řady:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ $\quad [r=1,\ \mathrm{OK}=\mathrm{OAK}=(-1,1)]$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n (x+4)^n$ $\quad [r=0,\ \mathrm{OK}=\mathrm{OAK}=\{-4\}]$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{n-1}$ $\quad [r=\frac{1}{2},\ \mathrm{OK}=\left\langle -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ \mathrm{OAK}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)]$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 10^n x^n$ $\quad [r=\frac{1}{10},\ \mathrm{OK}=\mathrm{OAK}=(-\frac{1}{10},\frac{1}{10})]$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2\cdot 5^{n-1}}$ $\quad [r=5,\ \mathrm{OK}=\mathrm{OAK}=\langle -3,7\rangle]$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{\sqrt[3]{n}\cdot 3^n}$ $\quad [r=3,\ \mathrm{OK}=\langle -6,0),\ \mathrm{OAK}=(-6,0)]$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{(n+1)!}(x-3)^n$ $\quad [r=+\infty,\ \mathrm{OK}=\mathrm{OAK}=(-\infty,\infty)]$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-6)^n}{n\cdot 2^n}$ $\quad [r=2,\ \mathrm{OK}=(4,8\rangle,\ \mathrm{OAK}=(4,8)]$

2. Rozviňte následující funkce v Taylorovu řadu:

a) $f(x)=\sqrt{x^3}$ v bodě $x_0=1$ $\quad \left[\sqrt{x^3}=1+\frac{3}{2}\left((x-1)+\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{1}{2^2}\frac{(x-1)^3}{3!}+\cdots\right)\right]$

b) $f(x)=\mathrm{e}^x$ v bodě $x_0=-2$ $\quad \left[\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{-2}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right]$

c) $f(x)=\ln x$ v bodě $x_0=1$ $\quad \left[\ln x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}\right]$

3. Rozviňte následující funkce v Maclaurinovu řadu:

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ $\quad [\mathrm{e}^{-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots,\ x \in \mathbb{R}]$

b) $f(x) = \sin 2x$ $\quad [\sin 2x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{2x}{1!} - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} - \cdots,\ x \in \mathbb{R}]$

c) $f(x) = \cos x^2$ $\quad [\cos x^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \cdots,\ x \in \mathbb{R}]$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $\quad [\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \cdots, |x| < 1]$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ $\quad [\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = 1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^9 + \cdots, |x| < 1]$

4. Užitím Maclaurinových rozvojů elementárních funkcí vypočtěte dané integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\left[\ln|x| + x + \frac{1}{2\cdot 2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n\cdot n!}x^n + \cdots + C = \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot n!} + C,\ x \in \mathbb{R} - \{0\}\right]$$

b) $\displaystyle\int x^2 \cos x\,\mathrm{d}x$

$$\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{x^7}{7\cdot 4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(2n)!} + \cdots + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)\cdot(2n)!} + C,\ x \in \mathbb{R}\right]$$

c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\left[x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} + \cdots + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} + C, |x| < 1,\ x \neq 0\right]$$

d) $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\left[x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \cdots + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C,\ x \in (-1, 1\rangle,\ x \neq 0\right]$$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^9}\,\mathrm{d}x$

$$\left[x + \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{19}}{19} + \cdots + \frac{x^{9n+1}}{9n+1} + \cdots + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{9n+1}}{9n+1} + C, |x| < 1\right]$$

Jana Řezníčková
reznickova@fai.utb.cz