

Kapitola 1: ČÍSELNÉ ŘADY

**Kontrolní otázky:**

1. Definujte **nekonečnou číselnou řadu**.
2. Co to znamená, že číselná řada **konverguje (diverguje)**? Uveďte jednoduchý příklad konvergentní (divergentní) řady s kladnými členy.
3. Definujte **geometrickou řadu** a uveďte, kdy tato řada konverguje a kdy diverguje.
4. Zformulujte **limitní odmocninové (limitní podílové, integrální) kritérium** pro řady s nezápornými členy.
5. Definujte **alternující řadu**.
6. Zformulujte **Leibnizovo kritérium konvergence**.
7. Vysvětlete rozdíl mezi **absolutně** a **neabsolutně konvergentní** řadou. Uveďte příklady.
8. Vysvětlete, za jakých podmínek platí pro nekonečné řady asociativní, distributivní a komutativní zákon.

**Příklady:**

**1.3 Základní pojmy**  
**1.4 Základní vlastnosti číselných řad**

Určete součet číselné řady:

<p>a) <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + n}</math> [2]</p>	<p>g) <math>\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{3^n}</math> <math>\left[ \frac{9}{2} \right]</math></p>
<p>b) <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}</math> <math>\left[ \frac{1}{2} \right]</math></p>	<p>h) <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{7 \cdot 10^n}</math> <math>\left[ \frac{5}{28} \right]</math></p>
<p>c) <math>\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n^2 + 5n + 6}</math> <math>\left[ \frac{3}{2} \right]</math></p>	<p>i) <math>\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n}{6^n}</math> <math>\left[ \frac{25}{2} \right]</math></p>
<p>d) <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}</math> <math>\left[ \frac{23}{90} \right]</math></p>	<p>j) <math>\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{3^{n-1}} - \frac{3}{5^{n-1}} \right)</math> <math>\left[ \frac{9}{4} \right]</math></p>
<p>e) <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 6n}</math> <math>\left[ \frac{11}{36} \right]</math></p>	<p>k) <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1} - 9 \cdot 3^{n-1}}{5 \cdot 6^{n+2}}</math> <math>\left[ \frac{1}{36} \right]</math></p>
<p>f) <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}</math> <math>\left[ \frac{1}{4} \right]</math></p>	<p>l) <math>\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 8^{n+1} - 15 \cdot 3^n}{16 \cdot 18^{n-1}}</math> <math>\left[ \frac{243}{4} \right]</math></p>

## 1.5 Řady s nezápornými členy

1. Pomocí limitního odmocninového kritéria rozhodněte o konvergenci (K) či divergenci (D) řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$	[K]	e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$	[K]
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n}{4n+3}\right)^n$	[D]	f) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \arccos^n \frac{1}{n}$	[D]
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$	[K]	g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot n^3}{\arctg^n n}$	[K]
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n}$	[K]	h) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot \sin^n \frac{2}{n}$	[D]

2. Pomocí limitního podílového kritéria rozhodněte o konvergenci (K) či divergenci (D) řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$	[K]	e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$	[D]
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$	[D]	f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n-1} \cdot n!}$	[D]
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$	[K]	g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$	[D]
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n \cdot n!}$	[K]	h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot 2n!}{(2n)!}$	[K]

3. Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci (K) či divergenci (D) řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$	[K]	e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$	[D]
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[5]{n}}$	[D]	f) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 6n + 9}$	[K]
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 9}$	[K]	g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 4}$	[D]
d) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4}$	[K]	h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^3 n}$	[K]

## 1.6 Řady s libovolnými členy

Rozhodněte o konvergenci absolutní (KA), konvergenci neabsolutní (KN), případně o divergenci (D) řad:

- |  |      |   |      |
|--|------|---|------|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}$            | [KA] | f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ | [KN] |
| b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-1}$           | [KN] | g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \cdot 4^n}$ | [KA] |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{5n-2}$           | [D]  | h) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$           | [KN] |
| d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}$              | [KA] | i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$       | [KN] |
| e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$ | [KN] | j) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \ln^3 n}$   | [KA] |

Jana Řezníčková  
reznickova@fai.utb.cz