

Kapitola 3: ODR VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

3.2 Lineární ODR vyšších řádů

Kontrolní otázky:

1. Co je to **wronskián**? Napište, jaký má tvar a na co se používá.
2. Co je to **fundamentální systém** a kde se používá?
3. Co je to **charakteristická rovnice**? Napište její tvar a uveďte, kde se používá.
4. Uveďte jednoduchý příklad **nehomogenní** lineární ODR 4. (5., 6., ...) řádu s konstantními koeficienty.
5. Jaké znáte metody řešení nehomogenních lineárních DR vyššího řádu s konstantními koeficienty? Jaké jsou výhody a nevýhody jejich použití?

Příklady:

A. Najděte obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n -tého řádu:

1. $2y'' - 5y' + 2y = 0$ $[y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}]$
2. $y'' + 6y' + 9y = 0$ $[y = e^{-3x} (C_1 + C_2 x)]$
3. $y'' - 9y = 0$ $[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}]$
4. $4y'' + 5y' = 0$ $[y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{4}x}]$
5. $y''' + 16y' = 0$ $[y = C_1 + C_2 \cos 4x + C_3 \sin 4x]$
6. $y'' - 4y' + 5y = 0$ $[y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)]$
7. $y''' + 4y'' - 4y' - 16y = 0$ $[y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}]$
8. $y''' - 7y' + 6y = 0$ $[y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}]$
9. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$ $[y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 x^2 e^{2x}]$
10. $y''' - y'' + y' - y = 0$ $[y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x]$
11. $y''' + y'' + y' - 3y = 0$ $[y = C_1 e^x + e^{-x} (C_2 \cos \sqrt{2}x + C_3 \sin \sqrt{2}x)]$
12. $y^{(4)} - 2y^{(3)} = 0$ $[y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{2x}]$
13. $y^{(5)} + 7y^{(4)} + 19y''' + 13y'' = 0$ $[y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + e^{-3x} (C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x)]$
14. $y^{(5)} + 10y''' + 25y' = 0$ $[y = C_1 + (C_2 + C_3 x) \cos \sqrt{5}x + (C_4 + C_5 x) \sin \sqrt{5}x]$
15. $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0$
 $[y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + (C_4 + C_5 x) \cos x + (C_6 + C_7 x) \sin x]$

B. Řešte počáteční úlohu:

1. $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 10$ $[y_p = 4e^x + 2e^{3x}]$
2. $y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 15$ $[y_p = 3e^{-2x} \sin 5x]$
3. $4y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$ $[y_p = e^{-\frac{1}{2}x} (x + 2)]$

C. Metodou neurčitých koeficientů najděte obecné řešení dané diferenciální rovnice:

1. $y'' - 2y' + 2y = 4x$ $[y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2x + 2]$
2. $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2$ $[y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x} + 5x^2 - 12x + 12]$
3. $y'' + 4y' - 5y = 1$ $[y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \frac{1}{5}]$
4. $y'' + y = 2x^3 - x + 2$ $[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x^3 - 13x + 2]$
5. $y''' - 5y'' = 3x$ $[y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{5x} - \frac{1}{10}x^3 - \frac{3}{50}x^2]$
6. $y''' - 4y'' + 5y' = 10x^2 + 9x$ $[y = C_1 + C_2 e^{2x} \cos x + C_3 e^{2x} \sin x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{16}{5}x]$
7. $2y'' + y' - y = 10e^{3x}$ $[y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}e^{3x}]$
8. $y''' + y'' - 6y' = 3e^{-4x}$ $[y = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{2x} - \frac{1}{8}e^{-4x}]$
9. $4y'' - 7y' - 2y = -5e^{2x}$ $[y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{5}{9}e^{2x}]$
10. $y'' + 3y' + 2y = (20x + 29)e^{3x}$ $[y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (x + 1)e^{3x}]$
11. $y'' - 4y = 3x^3 e^x$ $[y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - (x^3 + 2x^2 + \frac{14}{3}x + \frac{40}{9})e^x]$
12. $y'' - 2y' + 5y = 7xe^{2x}$ $[y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x + (\frac{7}{5}x - \frac{14}{25})e^{2x}]$
13. $y''' + 8y = 24e^{-2x}$ $[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x \cos \sqrt{3}x + C_3 e^x \sin \sqrt{3}x + 2xe^{-2x}]$
14. $2y'' - 5y' - 3y = 17 \sin 2x$ $[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{10}{13} \cos 2x - \frac{11}{13} \sin 2x]$
15. $y'' - 2y' + 10y = 37 \cos 3x$ $[y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \cos 3x - 6 \sin 3x]$
16. $y''' - y' = 4 \cos 2x$ $[y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} - \frac{2}{5} \sin 2x]$
17. $y'' + y = \sin x$ $[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x]$
18. $y'' - 3y' + 2y = 3 \sin 2x + 5 \cos 2x$ $[y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \frac{9}{10} \sin 2x + \frac{1}{5} \cos 2x]$
19. $y'' - 2y' + 5y = 5e^{2x} \sin x$ $[y = C_1 e^x \sin 2x + C_2 e^x \cos 2x + e^{2x} \sin x - \frac{1}{2}e^{2x} \cos x]$
20. $y''' + 4y' = 8e^{2x} + 10e^x \cos x$ $[y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + \frac{1}{2}e^{2x} + e^x (\frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x)]$

D. Řešte počáteční úlohu:

1. $y'' - y = 2(1 - x), \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$ $[y_p = e^x + 2e^{-2x} + 2x - 2]$
2. $y''' + 2y'' + y' = 4e^{-x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -2$ $[y_p = 4 - 4e^{-x} - 3xe^{-x} - 2x^2 e^{-x}]$
3. $y'' - 3y' + 2y = \sin x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2$ $[y_p = \frac{11}{5}e^{2x} - \frac{5}{2}e^x + \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x]$

Jana Řezníčková
reznickova@fai.utb.cz