

Kapitola 2: ODR 1. ŘÁDU

Kontrolní otázky ke Kapitole 2:

1. Popište metodu separace proměnných.
2. Napište stručný postup při hledání obecného řešení **lineární** ODR 1. řádu $y' = a(x)y + b(x)$, kde $a(x), b(x)$ jsou spojité funkce proměnné x .
3. Uveďte příklad **Bernoulli**ovy diferenciální rovnice.
4. Vysvětlete, co je to **exaktní** diferenciální rovnice. Napište její obecný tvar a podmínku exaktnosti.

2.7 Exaktní DR

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad P'_y = Q'_x$$

Příklady:

Dokažte, že daná diferenciální rovnice je exaktní, a najděte její obecné řešení:

1. $2xy dx + (1 + x^2) dy = 0$ $[x^2y + y = C]$
2. $(3x^2y^2 + 7) dx + (2x^3y - 3y^2) dy = 0$ $[x^3y^2 + 7x - y^3 = C]$
3. $(2xy^2 - 2y^3) dx - (6y^2x - 4y^3 - 2yx^2) dy = 0$ $[x^2y^2 - 2xy^3 + y^4 = C]$
4. $(2 + ye^{xy}) dx + (xe^{xy} - 2y) dy = 0$ $[2x + e^{xy} - y^2 = C]$
5. $(e^y + ye^x + 3) dx - (2 - xe^y - e^x) dy = 0$ $[xe^y + ye^x + 3x - 2y = C]$
6. $y(\sin x + \cos x) dx + (y + \sin x - \cos x) dy = 0$ $[y^2 + 2y(\sin x - \cos x) = C]$
7. $\sin^2 y dx + (x \sin 2y - 2y) dy = 0$ $[x \sin^2 y - y^2 = C]$
8. $(9x^2 \cos y + y^2 e^x) dx + (2ye^x + \cos y - 3x^3 \sin y) dy = 0$ $[3x^3 \cos y + y^2 e^x + \sin y = C]$
9. $(y^2 \sin 2x + 2x^3 y^2) dx + (x^4 y - y \cos 2x + 4 \cos 2y) dy = 0$ $[\frac{x^4}{2} y^2 - \frac{y^2}{2} \cos 2x + 2 \sin 2y = C]$
10. $(e^{2y} \cos x - 2e^{2x} \cos y) dx + (2e^{2y} \sin x - \cos y + e^{2x} \sin y) dy = 0$ $[e^{2y} \sin x - e^{2x} \cos y - \sin y = C]$

Poznámka: Ve všech uvedených výsledcích je $C \in \mathbb{R}$.

Jana Řezníčková
reznickova@fai.utb.cz