Kapitola 2: **ODR 1. ŘÁDU**

2.3 Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Příklady:

A. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

1. $y' = -\dfrac{x}{y}$ $[x^2 + y^2 = C,\ C \geq 0]$
2. $x^2 y' = 1 - y$ $[y = 1 - C\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},\ C \in \mathbb{R}]$
3. $y' = 1 + y^2$ $[y = \mathrm{tg}(x + C),\ C \in \mathbb{R}]$
4. $y' - xy^2 - y^2 - xy - y = 0$ $\left[y = \dfrac{C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+x}}{1 - C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+x}},\ y = -1,\ C \in \mathbb{R}\right]$
5. $\mathrm{e}^{x+y} - y' = 0$ $[\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-y} = C,\ C > 0]$
6. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x+1} - \dfrac{\mathrm{d}y}{y-1} = 0$ $[y = C(x+1) + 1,\ C \in \mathbb{R} - \{0\}]$
7. $(1+x)y\,\mathrm{d}x + (1-y)x\,\mathrm{d}y = 0$ $[\ln|xy| + x - y = C, y = 0,\ C \in \mathbb{R}]$
8. $(x+1)y' + xy = 0$ $[y = C(x+1)\mathrm{e}^{-x},\ C \in \mathbb{R}]$
9. $1 + y^2 + xyy' = 0$ $[C = (y^2+1)x^2,\ C > 0]$
10. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}y' = 0$ $[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C,\ C > 0]$
11. $\dfrac{4}{x}\,\mathrm{d}x - \dfrac{y-3}{y}\,\mathrm{d}y = 0$ $[y^3 x^4 = C\mathrm{e}^y,\ C \in \mathbb{R}]$
12. $\big(xy^2 + x\big)\,\mathrm{d}x + \big(y - x^2 y\big)\,\mathrm{d}y = 0$ $[1 + y^2 = C \cdot (x^2 - 1),\ C \in \mathbb{R}]$

B. Řešte počáteční úlohu:

1. $y^2 y' - 1 + 2x = 0,\ y(0) = 1$ $[y_p = \sqrt[3]{3(x - x^2) + 1}]$
2. $y \ln y + xy' = 0,\ y(1) = \mathrm{e}$ $[y_p = \mathrm{e}^x]$
3. $\dfrac{x}{1+y} - \dfrac{y}{1+x}y' = 0,\ y(0) = 1$ $[2(y_p^3 - x^3) + 3(y_p^2 - x^2) = 5]$
4. $2(1+\mathrm{e}^x)yy' - \mathrm{e}^x = 0,\ y(0) = 0$ $[\mathrm{e}^{y_p^2} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + 1)]$
5. $6y' - 2xy' - y^3 = 0,\ y(2) = \frac{1}{2}$ $[y_p^2 = \frac{1}{\ln|3-x|+4}]$
6. $y'(2 + x^3) - 9x^2 y = 0,\ y(-1) = 2$ $[y_p = 2\left(2 + x^3\right)^3]$
7. $y' - xy - y\sin x = 0,\ y(0) = \mathrm{e}$ $[y_p = \mathrm{e}^{2 + \frac{x^2}{2} - \cos x}]$
8. $y' + x^2 y' - y - 1 = 0,\ y(0) = 3$ $[y_p = 4\mathrm{e}^{\mathrm{arctg}\, x} - 1]$
9. $xy^3 y' - x^2 + x\mathrm{e}^x = 0,\ y(0) = -1$ $[y_p^4 = 2x^2 - 4\mathrm{e}^x + 5]$
10. $\sin y \cos x\,\mathrm{d}y = \cos y \sin x\,\mathrm{d}x,\ y(0) = \dfrac{\pi}{4}$ $[\sqrt{2}\cos y_p = \cos x]$

Jana Řezníčková
reznickova@fai.utb.cz