

♣ Vyšetříme funkci  $f(x)$ :  $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$ .

1. Stanovme definiční obor funkce  $D(f)$  a zjistíme, ve kterých bodech je funkce spojitá  
 $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ .

2. Počítáme

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\frac{2(x)^3}{(x)^2-1} = -f(x)$$

Funkce je lichá, není periodická

3. Vyšetříme body nespojitosti  $\pm 1$ , v těchto bodech určíme jednostranné limity:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3}{x+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \\ &= 1 \cdot (-\infty) = -\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3}{x+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \\ &= 1 \cdot (+\infty) = \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = \\ &= 1 \cdot (-\infty) = -\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^3}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^3}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = \\ &= 1 \cdot (\infty) = \infty. \end{aligned}$$

4. Asymptoty grafu funkce bez směrnice jsou přímky  $x = -1$  a  $x = 1$ . Asymptoty se směrnicí:

$$y = kx + q$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2.$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1} = 0.$$

Existuje tedy jediná asymptota se směrnicí  $y = 2x$ .

5. Intervaly monotonnosti určíme pomocí první derivace

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2 - 1) - 2x^3(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{6x^4 - 6x^2 - 4x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^4 - 6x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}.$$

- Pro rostoucí funkci platí, že  $f'(x) > 0$ :

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} > 0, \quad 2x^2(x^2 - 3) > 0.$$

Funkce je tedy rostoucí na intervalech  $(-\infty, -\sqrt{3})$  a  $(\sqrt{3}, \infty)$ .

- Pro funkci klesající platí, že  $f'(x) < 0$ :

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} < 0, \quad 2x^2(x^2 - 3) < 0$$

a klesající na intervalech  $(-\sqrt{3}, -1)$  a  $(-1, 1)$  a  $(1, \sqrt{3})$ .

6. Lokální extrémů funkce vypočítáme ze vztahu  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0, \quad 2x^2(x^2 - 3) = 0$$

Funkce tedy nabývá lokálních extrémů ve stacionárních bodech  $\pm\sqrt{3}$ . Zda funkce nabývá lokálního maxima ( $f''(x_s) \leq 0$ ) či lokálního minima ( $f''(x_s) \geq 0$ ) ve stacionárních bodech určíme pomocí druhé derivace

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2\{[2x((x^2 - 3) - x^2(2x))(x^2 - 1)^2 - x^2(x^2 - 3)[2(x^2 - 1)(2x)]\}}{[(x^2 - 1)^2]^2} = \\ &= \frac{[(8x^3 - 12x)(x^2 - 1)^2 - (2x^4 - 6x^2)(4x)]}{[(x^2 - 1)^2]^2} = \\ &= \frac{[(8x^3 - 12x)(x^2 - 1) - (2x^4 - 6x^2)(4x)]}{(x^2 - 1)^3} = \\ &= \frac{8x^5 - 8x^3 - 12^3 + 12x - 8x^5 + 24x^3}{(x^2 - 1)^3} = \\ &= \frac{4x^3 + 12x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \end{aligned}$$

Tedy,

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}[(\sqrt{3})^2 + 3]}{[(\sqrt{3})^2 - 1]^3} = \frac{4\sqrt{3}(3 + 3)}{(3 - 1)^3} = 3\sqrt{3} \geq 0$$

ve stacionárním bodě je lokálního minimum,

$$f''(-\sqrt{3}) = \frac{4(-\sqrt{3})[(-\sqrt{3})^2 + 3]}{[(-\sqrt{3})^2 - 1]^3} = \frac{4(-\sqrt{3})(3 + 3)}{(3 - 1)^3} = -3\sqrt{3} \leq 0$$

ve stacionárním bodě je lokální maximum.

Hodnoty funkce ve stacionárních bodech, dosadíme do zadání:

$$f(\sqrt{3}) = \frac{2(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = 3\sqrt{3}$$

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{2(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2 - 1} = -3\sqrt{3}$$

POZN: je zajímavé, že lokální maximum nabývá menší hodnoty než lokální minimum.

7. Intervaly, kde je funkce konkávní ( $f''(x) < 0$ ) či konvexní ( $f''(x) > 0$ ), určíme také pomocí druhé derivace:

- $f''(x) = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} > 0$

$$[4x(x^2 + 3) > 0 \wedge (x^2 - 1)^3 > 0] \vee [4x(x^2 + 3) < 0 \wedge (x^2 - 1)^3 < 0]$$

- $f''(x) = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} < 0$

$$[4x(x^2 + 3) < 0 \wedge (x^2 - 1)^3 > 0] \vee [4x(x^2 + 3) > 0 \wedge (x^2 - 1)^3 < 0]$$

Podle znamének určíme, že funkce je konvexní na intervalech  $(-1, 0)$ ,  $(1, \infty)$  a konkávní na intervalech  $(-\infty, -1)$ ,  $(0, 1)$ .

- Inflexní body z druhé derivace  $f''(x) = 0$ :

$$f''(x) = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0 \quad 4x(x^2 + 3) = 0$$

Funkce má tedy jediný inflexní bod v  $x = 0$ .

♣ Vyšetříme funkci  $f(x)$ :  $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

1. Stanovme definiční obor funkce  $D(f)$  a zjistíme, ve kterých bodech je funkce spojitá  
 $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ .

2. Počítáme

$$y(-x) = \frac{1 + (-x)^2}{1 - (-x)^2} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2} = y(x)$$

Funkce je sudá, není periodická

POZN: funkce je sudá, omezíme se proto na vyšetřování jen nezáporné části (graf je souměrný podle osy  $y$ ).

3. Vyšetříme body nespojitosti  $x = \pm 1$  a v těchto bodech je jednostranné limity:

- $$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1 + x^2}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1 + x^2}{(1 - x)(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1 + x^2}{1 - x} \cdot \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{1 + x} =$$
  

$$= 1 \cdot (-\infty) = -\infty,$$
- $$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1 + x^2}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1 + x^2}{(1 - x)(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1 + x^2}{1 - x} \cdot \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1 + x} =$$
  

$$= 1 \cdot (+\infty) = \infty,$$
- $$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 + x^2}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 + x^2}{(1 - x)(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 + x^2}{1 + x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - x} =$$
  

$$= 1 \cdot (\infty) = \infty,$$
- $$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + x^2}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + x^2}{(1 - x)(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + x^2}{1 + x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 - x} =$$
  

$$= 1 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Asymptoty grafu funkce bez směrnice jsou přímky  $x = -1$  a  $x = 1$ . Asymptoty se směrnicí:

$$y = kx + q$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{x(1-x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x})}{x^3(\frac{1}{x^2} - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x})}{(\frac{1}{x^2} - 1)} = \frac{0}{-1} = 0.$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(\frac{1}{x^2} + 1)}{x^2(\frac{1}{x^2} - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{x^2} + 1)}{(\frac{1}{x^2} - 1)} = -1$$

Existuje tedy jediná asymptota se směrnici  $y = -1$ .

4. Intervaly monotonnosti určíme pomocí první derivace:

$$y'(x) = \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x - 2x^3 + 2x + 2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

- Pro rostoucí funkci platí, že  $f'(x) > 0$ :

$$f'(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2} > 0, \quad 4x > 0.$$

Funkce je rostoucí na intervalech  $(0, 1)$  a  $(1, \infty)$

- Pro funkci klesající platí, že  $f'(x) < 0$ :

$$f'(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2} < 0, \quad 4x < 0$$

a klesající na intervalech  $(-\infty, -1)$  a  $(-1, 0)$ .

5. Lokální extrémů funkce vypočítáme ze vztahu  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = 4x(1-x^2)^2 = 0, \quad 4x = 0$$

Funkce tedy nabývá lokálního extrému ve stacionárním bodě  $x = 0$ . Zda funkce nabývá lokálního maxima ( $f''(x_s) \leq 0$ ) či lokálního minima ( $f''(x_s) \geq 0$ ) určíme pomocí druhé derivace

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4(1-x^2) - 4x(2)(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \\ &= \frac{4(1-x^2) - 8x(-2x)}{(1-x^2)^3} = \\ &= \frac{4 - 4x^2 + 16x^2}{(1-x^2)^3} = \\ &= \frac{4(3x^2 + 1)}{(1-x^2)^3}. \end{aligned}$$

Tedy,

$$f''(0) = \frac{4[3(0)^2 + 1]}{[1 - (0)^2]^3} = 4 \geq 0$$

ve stacionárním bodě  $x = 0$  je lokálního minimum.

Hodnotu funkce ve ve stacionárním bodě, dosadíme do zadání:

$$f(0) = \frac{1 + (4)^2}{1 - (4)^2} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

Hodnota lokálního extrému je rovna 1.

6. Intervaly, kde je funkce konkávní ( $f''(x) < 0$ ) či konvexní ( $f''(x) > 0$ ), určíme také pomocí druhé derivace:

$$y''(x) = \frac{4(3x^2 + 1)}{(1 - x^2)^3}$$

- $y''(x) = \frac{4(3x^2 + 1)}{(1 - x^2)^3} > 0$

$$[4(3x^2 + 1) > 0 \wedge (1 - x^2)^3 > 0] \vee [4(3x^2 + 1) < 0 \wedge (1 - x^2)^3 < 0]$$

funkce je konvexní na intervalu  $(-1, 1)$

- $y''(x) = \frac{4(3x^2 + 1)}{(1 - x^2)^3} < 0$

$$[4(3x^2 + 1) > 0 \wedge (1 - x^2)^3 < 0] \vee [4(3x^2 + 1) < 0 \wedge (1 - x^2)^3 > 0]$$

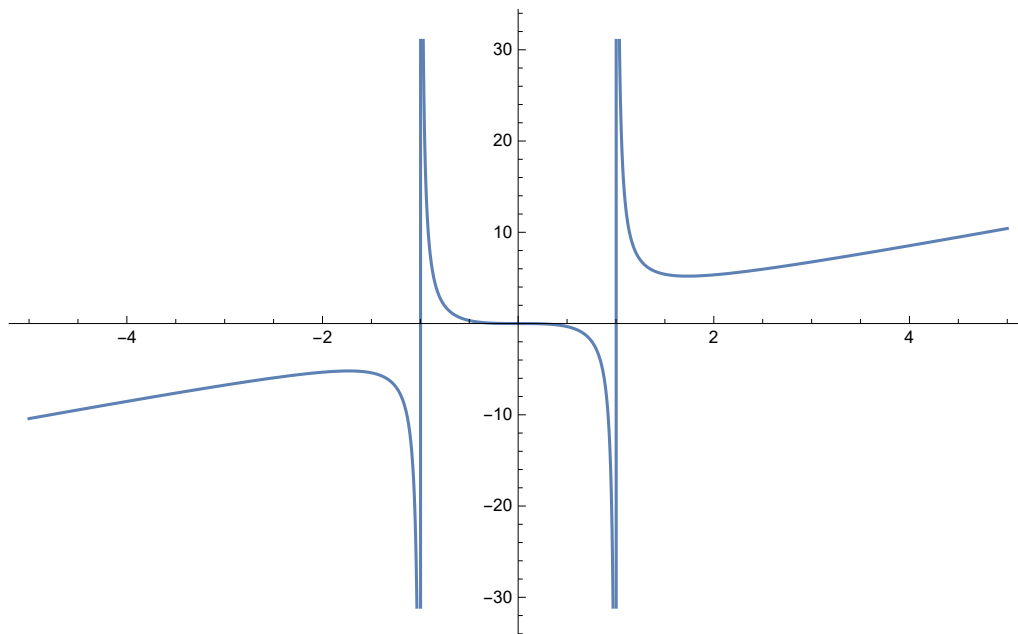
a konkávní na intervalech  $(-\infty, -1)$  a  $(1, \infty)$ .

- Inflexní body z druhé derivace  $f''(x) = 0$ :

$$f''(x) = \frac{4(3x^2 + 1)}{(1 - x^2)^3} = 0 \quad 4(3x^2 + 1) = 0$$

Funkce nemá žádný inflexní bod .

Plot  $\left[\frac{2x^3}{x^2-1}, \{x, -5, 5\}\right]$



Plot  $\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}, \{x, -5, 5\}\right]$

