1. Vypočítejte plošný integrál I. druhu $\int\limits_S (2x+\frac{4}{3}y+z)\,dS$ na ploše, kterou je část roviny $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ v I. oktantu.

   Plošný integrál převedme na dvojný integrál pomocí vztahu:

$$\int\limits_S F(x,y)\,dS = \iint\limits_{M_{xy}} F(x,y,f(x,y))\cdot\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\;dx\;dy,$$

   kde M_{xy} je průmět plochy S do roviny xy. Analogický vztah obdržíme, pokud promítneme plochu S do jiné souřadné roviny.
   Najděme tedy nejdříve průmět plochy do roviny xy. Průmětem je trojúhelník ohraničený přímkou $x=0$, $y=0$ a $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$. Meze této oblasti jsou $0\le x\le 2$ a $0\le y\le\frac{6-3x}{2}$, dále budeme potřebovat parciální derivace roviny v explicitním tvaru, tedy $f(x,y)=\frac{12-6x-4y}{3}$, derivací získáme $f_x'(x,y)=-2$ a $f_y'(x,y)=-\frac{4}{3}$.

$$\int\limits_S\left(2x+\frac{4}{3}y+z\right)dS=\iint\limits_{M_{xy}}\left(2x+\frac{4}{3}y+\frac{12-6x-4y}{3}\right)\cdot\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}\;dx\;dy=$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{6-3x}{2}}\left(2x+\frac{4}{3}y+\frac{12-6x-4y}{3}\right)\sqrt{5+\frac{16}{9}}\;dy=$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{6-3x}{2}}\frac{6x+4y+12-6x-4y}{3}\sqrt{\frac{61}{9}}\;dy=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{6-3x}{2}}\frac{12}{3}\sqrt{\frac{61}{9}}\;dy=$$

$$=4\frac{\sqrt{61}}{3}\int_0^2 dx\int_0^{\frac{6-3x}{2}}dy=4\frac{\sqrt{61}}{3}\int_0^2\Big[y\Big]_0^{\frac{6-3x}{2}}dx=4\frac{\sqrt{61}}{3}\int_0^2\frac{6-3x}{2}\;dx$$

$$=2\frac{\sqrt{61}}{3}\left[6x-\frac{3x^2}{2}\right]_0^2=2\frac{\sqrt{61}}{3}(12-6)=4\frac{\sqrt{61}}{3}$$

2. Vypočítejte plošný integrál I. druhu $\int\limits_S x\cdot y\cdot z\,dS$ na ploše, kterou je část roviny $x+y+z=1$ v I. oktantu.

   Budeme potřebovat průmět plochy S do roviny např. xy. Dostaneme trojúhelník ohraničený přímkami $x=0, y=0$ a $x+y=1$, meze takové oblasti jsou
   $0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$. Dále budeme potřebovat parciální derivace roviny v explicitním tvaru, tedy $f(x,y)=1-x-y$, derivací získáme $f_x'(x,y)=-1$ a $f_y'(x,y)=-1$.

$$\int\limits_S(x\cdot y\cdot z)\,dS=\iint\limits_{M_{xy}}x\cdot y\cdot(1-x-y)\cdot\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\;dx\;dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}x\cdot y\cdot(1-x-y)\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\;dy=$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}xy-x^2y-xy^2\;dy=\sqrt{3}\int_0^1\left[x\frac{y^2}{2}-x^2\frac{y^2}{2}-x\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}dx=$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2} - x^2\frac{(1-x)^2}{2} - x\frac{(1-x)^3}{3}\ dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^1 x(1-2x+x^2) - 3x^2(1-2x+x^2) - 2x(1-3x+3x^2-x^3)\ dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^1 x - 3x^2 + 3x^3 - x^4\ dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{6}{120}\right) = \frac{\sqrt{3}}{120}$$

3. Vypočítejte plošný integrál I. druhu $\int\limits_S x^2 + y^2\, dS$ na ploše, kterou je eliptický paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ a platí, že $z \leq 0$.

Budeme potřebovat průmět plochy S do roviny např. xy. Dostaneme kružnici $x^2 + y^2 = 1$, kterou vyjádříme pomocí polárních souřadnic a dostaneme meze $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, nezapomeneme na jakobián transformace do polárních souřadnic ρ. Dále budeme potřebovat parciální derivace roviny v explicitním tvaru, tedy $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, derivací získáme $f'_x(x,y) = -2x$ a $f'_y(x,y) = -2y$.

$$\int\limits_S (x^2+y^2)\, dS = \iint\limits_{M_{xy}} (x^2+y^2) \cdot \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2}\ dx\ dy =$$

Integrál přetransformujeme do polárních souřadnic:

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \Big[(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2\Big]\sqrt{1 + (-2\rho\cos\varphi)^2 + (-2\rho\sin\varphi)^2}\rho\ d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3\sqrt{1+4\rho^2}\ d\rho = \begin{bmatrix} 1 + 4\rho^2 = t \\ 8\rho d\rho = dt \\ \rho d\rho = \frac{dt}{8} \end{bmatrix}$$