Zapište prostorovou oblast pomocí nerovností:

1. Koule $x^2+y^2+z^2 \le 9$.

   Kulová plocha : $x^2+y^2+z^2=9 \Rightarrow z^2=9-x^2-y^2 \Rightarrow z=\pm\sqrt{9-x^2-y^2}$
   Průmět plochy do roviny xy (tj. $z=0$) :
   $x^2+y^2=9 \Rightarrow y=\pm\sqrt{9-x^2}$ nebo $x=\pm\sqrt{9-y^2}$

$$\begin{array}{rcccl} -3 & \le & x & \le & 3 \\ -\sqrt{9-x^2} & \le & y & \le & \sqrt{9-x^2} \\ -\sqrt{9-x^2-y^2} & \le & z & \le & \sqrt{9-x^2-y^2} \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{rcccl} -3 & \le & y & \le & 3 \\ -\sqrt{9-y^2} & \le & x & \le & \sqrt{9-y^2} \\ -\sqrt{9-x^2-y^2} & \le & z & \le & \sqrt{9-x^2-y^2} \end{array}$$

2. Prostorová oblast ohraničená plochami dvou paraboloidů $x^2+y^2-z=0, x^2+y^2+z=8$.

   $x^2+y^2-z=0 \Rightarrow z=x^2+y^2$
   $x^2+y^2+z=8 \Rightarrow z=8-x^2-y^2$.
   Průsečná křivka paraboloidů: $x^2+y^2=8-x^2-y^2 \Rightarrow 2x^2+2y^2=8 \Rightarrow x^2+y^2=4$

$$\begin{array}{rcccl} -2 & \le & x & \le & 2 \\ -\sqrt{4-x^2} & \le & y & \le & \sqrt{4-x^2} \\ x^2+y^2 & \le & z & \le & 8-x^2-y^2 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{rcccl} -2 & \le & y & \le & 2 \\ -\sqrt{4-y^2} & \le & x & \le & \sqrt{4-y^2} \\ x^2+y^2 & \le & z & \le & 8-x^2-y^2 \end{array}$$

3. Prostorová oblast ohraničená eliptickou plochou $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$.

   Z rovnice plochy vyjádříme z : $z=\pm 2\sqrt{1-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}}$
   Průmět plochy do roviny xy : $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

$$\begin{array}{rcccl} -5 & \le & x & \le & 5 \\ -3\sqrt{1-\frac{x^2}{25}} & \le & y & \le & 3\sqrt{1-\frac{x^2}{25}} \\ -2\sqrt{1-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}} & \le & z & \le & 2\sqrt{1-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}} \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{rcccl} -3 & \le & y & \le & 3 \\ -5\sqrt{1-\frac{y^2}{9}} & \le & x & \le & 5\sqrt{1-\frac{y^2}{9}} \\ -2\sqrt{1-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}} & \le & z & \le & 2\sqrt{1-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}} \end{array}$$

4. Prostorová oblast ohraničená kulovou plochou $x^2+y^2+z^2=2$ a kuželovou plochou $x^2+y^2-z^2=0, z \ge 0$ (uvnitř kužele).

   Průsečná křivka (z rovnice kuželové plochy vyjádříme $z^2=x^2+y^2$ a dosadíme do rce kulové plochy):
   $x^2+y^2+x^2+y^2=2 \Rightarrow x^2+y^2=1 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$

$$\begin{array}{rcccl} -1 & \le & x & \le & 1 \\ -\sqrt{1-x^2} & \le & y & \le & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{x^2+y^2} & \le & z & \le & \sqrt{2-x^2-y^2} \end{array}$$

5. Prostorová oblast ohraničená v I. oktantě rovinou $x+y+z=2$.

   Průmět do roviny xy : $x+y=2 \Rightarrow y=2-x \quad \wedge \quad x \ge 0 \wedge y \ge 0$ (I. kvadrant)

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \le & x & \le & 2 \\ 0 & \le & y & \le & 2-x \\ 0 & \le & z & \le & 2-x-y \end{array}$$

6. Prostorová oblast ohraničená v I. oktantě plochami $z = 2y^2, 3x + 4y = 12$.

   Průsečnice roviny $3x + 4y = 12$ s rovinou xy : přímka $3x + 4y = 12 \Rightarrow y = 3 - \frac{3}{4}x$.
   Průsečík této přímky s osou $x : y = 0 \Rightarrow x = 4$.

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & x & \leq & 4 \\ 0 & \leq & y & \leq & 3 - \frac{3}{4}x \\ 0 & \leq & z & \leq & 2x^2 \end{array}$$

7. Prostorová oblast ohraničená v I. oktantě plochami $z = y + 1, z = \frac{y}{2}$ a válcovou plochou $x^2 + y^2 = 9$. Průsečnice válcové plochy s rovinou xy : kružnice $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y = \sqrt{9 - x^2}$ (I. kvadrant)

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & x & \leq & 3 \\ 0 & \leq & y & \leq & \sqrt{9 - x^2} \\ \frac{y}{2} & \leq & z & \leq & y + 1 \end{array}$$

8. Prostorová oblast ohraničená v I. oktantě plochami $z = 1, x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

   Průsečná křivka: $x^2 + y^2 - 1^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$.

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & x & \leq & 1 \\ 0 & \leq & y & \leq & \sqrt{1 - x^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} & \leq & z & \leq & 1 \end{array}$$

Zapište prostorovou oblast pomocí nerovností ve válcových souřadnicích

1. Válec $x^2 + y^2 \leq 1$ a roviny $z = 0, z = 4$.
   Dosadíme: $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right) = r^2 \leq 1 \Rightarrow r \leq 1$

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & r & \leq & 1 \\ 0 & \leq & \varphi & \leq & 2\pi \\ 0 & \leq & z & \leq & 4 \end{array}$$

2. Osmina koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ v I. oktantu.

   Dosadíme: $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + z^2 = r^2 \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right) + z^2 = r^2 + z^2 \leq 4 \Rightarrow z^2 \leq 4 - r^2$
   Průmět koule do roviny xy : kruh $x^2 + y^2 \leq 4$.
   Dosadíme: $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right) = r^2 \leq 4 \Rightarrow r \leq 2$.

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & r & \leq & 2 \\ 0 & \leq & \varphi & \leq & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \leq & z & \leq & \sqrt{4 - r^2} \end{array}$$

3. Válec $x^2 + y^2 \leq 1$ v kouli $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

   Dosadíme:
   Válec: $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right) = r^2 \leq 1$
   Koule: $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + z^2 = r^2 \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right) + z^2 = r^2 + z^2 \leq 9 \Rightarrow z^2 \leq 9 - r^2$

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & r & \leq & 1 \\ 0 & \leq & \varphi & \leq & 2\pi \\ -\sqrt{9 - r^2} & \leq & z & \leq & \sqrt{9 - r^2} \end{array}$$

4. $x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2+y^2 \le 2x, z \ge 0.$

   Dosadíme válcové souřadnice do první nerovnosti: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + z^2 = r^2+z^2 \le 4 \Rightarrow z \le \sqrt{4-r^2}$.
   Druhá nerovnost - upravíme na čtverec: $(x-1)^2+y^2 \le 1$
   Dosadíme do původní nerovnosti: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \le 2r\cos\varphi \Rightarrow r \le 2\cos\varphi$

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \le & r & \le & 2\cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2} & \le & \varphi & \le & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \le & z & \le & \sqrt{4-r^2} \end{array}$$

Zapište prostorovou oblast pomocí nerovností ve sférických souřadnicích

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi\sin\psi \\ y & = & r\sin\varphi\sin\psi \\ z & = & r\cos\psi. \end{array}$$

1. Koule $x^2+y^2+z^2 \le 4$.

   Dosadíme sférické souřadnice:
   $r^2\cos^2\varphi\sin^2\psi + r^2\sin^2\varphi\sin^2\psi + r^2\cos^2\psi = r^2\sin^2\psi\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) + r^2\cos^2\psi = r^2\sin^2\psi + r^2\cos^2\psi = r^2\left(\sin^2\psi+\cos^2\psi\right) = r^2 \le 4$

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \le & r & \le & 2 \\ 0 & \le & \varphi & \le & 2\pi \\ 0 & \le & \psi & \le & \pi \end{array}$$

2. Oblast je určena nerovnostmi $4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9$ a leží v I.oktantu.

   V předchozím příkladu bylo vypočteno: $x^2+y^2+z^2 = r^2$
   Dosadíme: $4 \le r^2 \le 9 \Rightarrow 2 \le r \le 3$

$$\begin{array}{rcccl} 2 & \le & r & \le & 3 \\ 0 & \le & \varphi & \le & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \le & \psi & \le & \frac{\pi}{2}. \end{array}$$

3. $x^2+y^2+z^2 \le 1, x^2+y^2 \le z^2.$

   Dosadíme do první nerovnosti: $x^2+y^2+z^2 = r^2 \le 1 \Rightarrow r \le 1$
   Dosadíme do druhé nerovnosti: $r^2\cos^2\varphi\sin^2\psi + r^2\sin^2\varphi\sin^2\psi = r^2\sin^2\psi\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) = r^2\sin^2\psi \le r^2\cos^2\psi \Rightarrow \sin^2\psi \le \cos^2\psi \Rightarrow \tan^2\psi \le 1 \Rightarrow \tan\psi \le 1 \Rightarrow \psi \le \frac{\pi}{4}$

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \le & r & \le & 1 \\ 0 & \le & \varphi & \le & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \le & \psi & \le & \frac{\pi}{4}. \end{array}$$

4. Oblast ohraničená plochami o rovnicích $x^2+y^2+z^2 = 16, y = \frac{1}{\sqrt{3}}x, y = x$ a ležící v I. oktantu.

   Dosazení: $x^2+y^2+z^2 = r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$
   $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \quad \Rightarrow \quad r\sin\varphi\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}r\cos\varphi\sin\psi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi \Rightarrow \tan\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$
   $y = x \quad \Rightarrow \quad r\sin\varphi\sin\psi = r\cos\varphi\sin\psi \Rightarrow \sin\varphi = \cos\varphi \Rightarrow \tan\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \le & r & \le & 4 \\ \frac{\pi}{6} & \le & \varphi & \le & \frac{\pi}{4} \\ 0 & \le & \psi & \le & \frac{\pi}{2}. \end{array}$$