1. Vypočítejte křivkový integrál I. druhu $\int\limits_k \frac{1}{x-y}\, dS$, po úsečce $|AB|$, od bodu $A(0,-2)$ po bod $B(4,0)$.

Nejdříve najdeme parametrické rovnice úsečky $|AB|$ pomocí směrového vektoru $\vec{u}$, kde $\vec{u} = |B-A|$=$(4,2)$. Parametrické rovnice potom dostaneme ve tvaru: $x = 0 + 4t, y = -2 + 2t$, kde inetrval pro t určíme z jedné z parametrických rovnic, např. $x = 4t$, $x_A = 0$ a $x_B = 4$ po dosazení do rovnice dostaneme $t_A = 0$ a $t_B = 1$, proto $t \in \langle 0, 1\rangle$.
Pro výpočet křivkového integrálu I. druhu využijeme následujícího vztahu:

$$\int\limits_k f(x,y)\, dS = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(X(t), Y(t)) \cdot \sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2}\, dt,$$

kde $x = X(t), y = Y(t)$ pro $t \in \langle t_1, t_2\rangle$ jsou parametrické rovnice křivky a $X'(t), Y'(t)$ jsou derivace funkcí dle t.
Po dosazení do vztahu dostáváme:

$$\int\limits_k \frac{1}{x-y}\, dS = \int\limits_0^1 \frac{1}{4t-(-2+2t)} \cdot \sqrt{4^2+2^2}\, dt = \int\limits_0^1 \frac{1}{4t+2-2t} \cdot \sqrt{16+4}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{1}{2t+2} \cdot 2\sqrt{5}\, dt = \frac{2\sqrt{5}}{2} \int\limits_0^1 \frac{1}{t+1}\, dt = 2\sqrt{5}\Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 = 2\sqrt{5}\ln 2$$

2. Vypočítejte křivkový integrál I. druhu $\int\limits_k xy\, dS$ po křivce k, kterou je čtvrtina kružnice $x^2 + y^2 = 4$.

Dostaneme parametrické rovnice kružnice $x = 2\cos t, y = 2\sin t$, pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Po dosazení do vztahu z příkladu (1), dostaneme integrál:

$$\int\limits_k xy\, dS = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \cdot 2\sin t \cdot \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}\, dt =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\, dt = \begin{bmatrix} \sin t = n \\ \cos t = dn \end{bmatrix}_0^1 =$$

$$= 8\int\limits_0^1 n\, dn = 8\left[\frac{n^2}{2}\right]_0^1 = 4$$

3. Vypočítejte křivkový integrál I. druhu $\int\limits_k (x^2+y^2)^n \, dS$ po křivce k, kterou je kružnice $x^2 + y^2 = a^2$.

Parametricky vyjádříme kružnici pomocí rovnic $x = a\cos t, y = a\sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Dostáváme jednoduchý integrál

$$\int\limits_k (x^2 + y^2)^n \, dS = \int\limits_0^{2\pi} (a\cos^2 t + a\sin^2)^n \cdot \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} \, dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} a^{2n} \cdot \sqrt{a^2} \, dt = a^{2n+1} \int\limits_0^{2\pi} \, dt = 2\pi a^{2n+1}$$

4. Vypočítejte křivkový integrál I. druhu $\int\limits_k \frac{z^2}{x^2+y^2} \, dS$ po prostorové křivce k, kterou je jeden závit šroubovice $x = a\cos t, y = \sin t, z = at$ pro $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Po převedení na jednoduchý integrál dostáváme:

$$\int\limits_k \frac{z^2}{x^2 + y^2} \, dS = \int\limits_0^{2\pi} \frac{a^2 t^2}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + a^2} \, dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{a^2 t^2}{a^2} \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + a^2} \, dt = \int\limits_0^{2\pi} t^2 \sqrt{a^2 + a^2} \, dt = \sqrt{2a^2} \int\limits_0^{2\pi} t^2 \, dt =$$

$$= \sqrt{2a^2} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} \, dt = \frac{8\sqrt{2}\pi^3 a}{3}$$

5. Vypočítejte křivkový integrál II. druhu $\int\limits_k (x^2 - y^2) \, dx$ po křivce k, kterou je oblouk paraboly $y = x^2$, od bodu $O(0, 0)$ do bodu $A(2, 4)$.

Jako u křivkových integrálů I.druhu určíme nejdříve parametrické rovnice, získáme je jednoduše, pokud zvolíme za $x = t$, potom $y = t^2$. Parametr t pro $x_0 = 0$ a $x_A = 2$ vidíme z první rovnice $t_0 = 0$ a $t_A = 2$.
Pro výpočet křivkového integrálu II. druhu využijeme následujícího vztahu:

$$\int\limits_k f(x, y) \, dx + g(x, y) \, dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big[f(X(t), Y(t)) \cdot X'(t) + g(X(t), Y(t)) \cdot Y'(t) \Big] dt,$$

kde $x = X(t), y = Y(t)$ pro $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ jsou parametrické rovnice křivky a $X'(t), Y'(t)$ jsou derivace funkcí dle t.
Po dosazení dostáváme integrál

$$\int\limits_k (x^2 - y^2)\ dx = \int\limits_0^2 [t^2 - (t^2)^2]\ dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 - \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{32}{5} = -\frac{56}{15}$$

6. Vypočítejte křivkový integrál II. druhu $\int\limits_k y\ dx - x\ dy$ po křivce k, kterou je oblouk elipsy s parametrickými rovnicemi $x = a\cos t, y = b\sin t$, pro $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

   Po převedení na jednoduchý integrál dostáváme

$$\int\limits_k y\ dx - x\ dy = \int\limits_0^\pi \Big[b\sin t(-a\sin t) - a\cos t(b\cos t)\Big]\ dt = \int\limits_0^\pi -ab\sin^2 - ab\cos^2 t\ dt =$$

$$= \int\limits_0^\pi -ab(\sin^2 t + \cos^2 t)\ dt = -ab\int\limits_0^\pi\ dt = -\pi ab$$

7. Vypočítejte křivkový integrál II. druhu $\int\limits_k \frac{y\ dx + y\ dy}{x^2 - y^2}$ po křivce k, kterou je přímka $y = x$ od bodu $A(1,1)$ po bod $B(2,2)$.

   Parametrické rovnice úsečky jsou $x = t, y = t$ pro $t \in \langle 1, 2 \rangle$. Po převedení na jednoduchý integrál dostáváme

$$\int\limits_k \frac{y\ dx + y\ dy}{x^2 + y^2} = \int\limits_1^2 \frac{t + t}{t^2 + t^2}\ dt = \int\limits_1^2 \frac{1}{t}\ dt = \Big[\ln t\Big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

8. Vypočítejte křivkový integrál II. druhu $\int\limits_k x\ dx + y\ dy + (x + y - 1)\ dz$ po prostorové křivce k, kterou je přímka od bodu $A(1,1,1)$ po bod $B(2,3,4)$.

   Nejdříve najdeme parametrické rovnice úsečky $|AB|$ pomocí směrového vektoru $\vec{u}$, kde $\vec{u} = |B - A|$=$(1,2,3)$. Parametrické rovnice potom dostaneme ve tvaru:
   $x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1 + 3t$, kde inetrval pro t určíme z jedné z parametrických rovnic, např. $x = 1 + t$, $x_A = 1$ a $x_B = 2$ po dosazení do rovnice dostaneme $t_A = 0$ a $t_B = 1$, proto $t \in \langle 0, 1 \rangle$.
   Pro výpočet tohoto křivkového integrálu II. druhu dostáváme :

$$\int\limits_k x\ dx + y\ dy + (x + y - 1)\ dz = \int\limits_0^1 \Big[(1 + t) + (1 + 2t)2 + (1 + 3t)3\Big]\ dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (1 + t + 2 + 4t + 3 + 9t)\ dt = \int\limits_0^1 (6 + 14t)\ dt = \left[6t + 14\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 6 + 7 = 13$$