Funkce zadaná implicitně

$F(x,y)$ má spojitou $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)$ v bodě (x_0,y_0) a $F_y(x_0,y_0)\neq 0$, pak existuje okolí bodu (x_0,y_0), v němž předpis $F(x,y)=0$ zadává implicitně právě jednu spojitou funkci $y=f(x)$ a

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$$

1. Najděte rovnici tečny v bodě $[1,1]$ k $x^3+y^3+2xy=0$

$$F_y = 3y^2-2x, \quad , \quad F_y(1,1)=1\neq 0$$
$$f'(1) = -\frac{3x^2-2y}{3y^2-2x} = -1$$
$$t: y = 1-(x-1) \Rightarrow x+y-2=0$$

2. Rozhodněte, jestli je graf křivky $x^3+y^3-2xy=0$ v okolí bodu $[1,1]$ pod tečnou nebo nad tečnou.
Celou rovnici dvakrát zderivujeme podle x s ohledem na $y=y(x)$ a vypočteme druhou derivaci.

$$3x^2+3y^2y'-2y-2xy'=0 \Rightarrow y' = \frac{2y-3x^2}{3y^2-2x},\ y'(1,1)=-1$$
$$6x+6yy'^2+3y^2y''-2y'-2xy''-2y'=0$$
$$y'' = \frac{4y'-6x-6yy'^2}{3y^2-2x}$$

Po dosazení:

$$y''(1,1) = -16<0 \Rightarrow \text{funkce je v okolí bodu [1,1] konkávní, graf je pod tečnou}$$

3. Nalezněte rovnici tečné roviny v bodě $[1,0,1]$ k ploše $x^3+y^3+z^3-3xyz-x-y-z=0$.

$$\frac{\partial}{\partial x}: \quad 3x^2+3z^2z_x-3yz-3xyz_x-1-z_x=0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}: \quad 3y^2+3z^2z_y-3xz-3xyz_y-1-z_y=0$$
$$z_x = \frac{3x^2-3yz-1}{3xy+1-3z^2}, \quad z_y = \frac{3y^2-3xz-1}{3xy+1-3z^2}$$

$z_x(1,0)=-1, \quad z_y(1,0)=2$

$$\tau: z-1 = -(x-1)+2y \Rightarrow -x+2y-z+2=0$$

4. Spočtěte druhé derivace funkce zadané implicitně v bodě $[1,1,1]$ předpisem $x+y^2+z^3+z-4=0$.

$$\frac{\partial}{\partial x}: \quad 1+3z^2z_x+z_x=0 \Rightarrow z_x = -\frac{1}{1+3z^2}, \quad z_x(1,1) = -\frac{1}{4}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}: \quad 2y+3z^2z_y+z_y=0 \Rightarrow z_y = -\frac{2y}{1+3z^2}, \quad z_y(1,1) = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x^2}: \quad 6zz_x^2+3z^2z_{xx}+z_{xx}=0 \Rightarrow z_{xx} = -\frac{6z_x^2z}{1+3z^2}, \quad z_{xx}(1,1) = -\frac{3}{32}$$
$$\frac{\partial}{\partial x\partial y}: \quad 6zz_xz_y+3z^2z_{xy}+z_{xy} \Rightarrow z_{xy} = -\frac{6z_xz_yz}{1+3z^2}, \quad z_{xy}(1,1) = -\frac{7}{8}$$
$$\frac{\partial}{\partial y^2}: \quad 2+6zz_y^2+3z^2z_{yy}+z_{yy}=0 \Rightarrow z_{yy} = -\frac{2+6z_y^2z}{1+3z^2}, \quad z_{yy}(1,1) = -\frac{3}{16}$$

5. Nalezněte lokální extrémy funkce zadané implicitně předpisem $x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz = 1$

$$\frac{\partial}{\partial x}: \quad 2x + 2zz_x - z - xz_x - \sqrt{2}yz_x = 0 \Rightarrow z_x = \frac{z - 2x}{2z - x - \sqrt{2}y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}: \quad -xz_y + 2y + 2zz_y - \sqrt{2}z - \sqrt{2}yz_y = 0 \Rightarrow z_y = \frac{\sqrt{2}z - 2y}{2z - x - \sqrt{2}y}$$

Hledáme stacionární body:
$z_x = 0 \Rightarrow z = 2x$, $z_y = 0 \Rightarrow z = \sqrt{2}y$, tedy $y = \sqrt{2}x$.

$$P_1 = [1, \sqrt{2}, 2], P_2 = [-1, -\sqrt{2}, -2], \quad F_z \neq 0 \quad \text{v těchto bodech}$$

$$z_{xx} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} - \frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}$$

Vypočteme druhé derivace

$$z_{xx}z_{yy} = -z_{xy}^2 = 1 > 0 \quad \text{v} \quad P_1, P_2$$

$z_{xx}(P_1) < 0 \Rightarrow$ v bodě P_1 je lokální maximum, $z_{xx}(P_2) > 0 \Rightarrow$ v bodě P_2 je lokální minimum.