1. Vypočtěte diferenciál $df(x)$ pro funkci $f(x) = \arctan \frac{1}{x}, h \in \mathbb{R}$.
Řešení:
$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2},$$
$$df(x) = f'(x)h = -\frac{1}{1+x^2}h.$$

2. Vypočtěte přírůstek funkce $f(x_0+h) - f(x_0)$ a diferenciál funkce $df(x_0)$, je-li $f(x) = x^2 - 3x + 4, x_0 = 1, h = -0,2$.
Řešení:
$$f(x_0+h) - f(x_0) = f(0,8) - f(1) = \left(0,8^2 - 3 \cdot 0,8 + 4\right) - \left(1^2 - 3 \cdot 1 + 4\right) = 2,24 - 2 = 0,24.$$
$$df(x_0) = f'(x_0)h = (2x_0 - 3)h = (2 \cdot 1 - 3) \cdot (-0,2) = 0,2.$$

3. Užitím diferenciálu vypočtěte přibližně

   a) $2,03^5$,
   b) $\cos 59°$.

   Řešení:

   a) Použijeme vzorec $f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Máme
   $f(x) = x^5, x_0 = 2, x - x_0 = h = 0,03$,
   $f(x_0) = f(2) = 2^5 = 32, f'(x) = 5x^4, f'(x_0) = f'(2) = 5 \cdot 2^4 = 80$.
   Aplikujeme diferenciál: $2,03^5 \doteq 32 + 80 \cdot 0,03 = 32 + 2,4 = 34,4$.
   Přesná hodnota je po zaokrouhlení $34,473$.
   b) $f(x) = \cos x, x_0 = 60° = \frac{\pi}{3}, x - x_0 = h = -1° = -\frac{\pi}{180}$,
   $f(x_0) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, f'(x) = -\sin x, f'(x_0) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   $\cos 59° \doteq \frac{1}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,0174 \doteq 0,5151$.
   Přesná hodnota je po zaokrouhlení $0,515$.

4. Napište Taylorův polynom 5. stupně se středem v bodě $x_0 = 1$ pro funkci $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 6x + 5$.
Řešení: Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě x_0 má tvar
$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$
$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 6x + 5, \\ f'(x) &= 5x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 8x - 6, \\ f''(x) &= 20x^3 - 36x^2 + 12x + 8, \\ f'''(x) &= 60x^2 - 72x + 12, \\ f^{(4)}(x) &= 120x - 72, \\ f^{(5)}(x) &= 120. \end{aligned}$$
Pro $x_0 = 1$ máme
$$f(1) = 3,\ f'(1) = 1,\ f''(1) = 4,\ f'''(1) = 0,\ f^{(4)}(1) = 48,\ f^{(5)}(1) = 120.$$
Dosazením do vzorce dostáváme
$$\begin{aligned} T_5(x) &= 3 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{4}{2!}(x-1)^2 + \frac{0}{3!}(x-1)^3 + + \frac{48}{4!}(x-1)^4 + + \frac{120}{5!}(x-1)^5 \\ &= 3 + (x-1) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)^4 + (x-1)^5 . \end{aligned}$$

5. Napište Taylorův polynom 4. stupně se středem v bodě $x_0 = -1$ pro funkci $f(x) = \frac{1}{x}$.
Řešení:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}.$$

Pro $x_0 = -1$:

$$f(-1) = -1,\ f'(-1) = -1,\ f''(-1) = -2,\ f'''(-1) = -6,\ f^{(4)}(-1) = -24.$$

$$\begin{aligned} T_4(x) &= -1 + \frac{-1}{1!}(x+1) + \frac{-2}{2!}(x+1)^2 + \frac{-6}{3!}(x+1)^3 + \frac{-24}{4!}(x+1)^4 \\ &= -1 - (x+1) - (x+1)^2 - (x+1)^3 - (x+1)^4 . \end{aligned}$$

6. Napište Taylorův polynom 3. stupně se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci $f(x) = e^{\cos x}$.
Řešení:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\cos x}, \\ f'(x) &= (-\sin x) \cdot e^{\cos x}, \\ f''(x) &= (-\cos x) \cdot e^{\cos x} + (-\sin x) \cdot e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = e^{\cos x}\left(\sin^2 x - \cos x\right), \\ f'''(x) &= e^{\cos x} \cdot (-\sin x) \cdot \left(\sin^2 x - \cos x\right) + e^{\cos x} \cdot (2 \sin x \cos x + \sin x) \\ &= e^{\cos x}\left(-\sin^3 x + 3 \sin x \cos x + \sin x\right) = e^{\cos x} \sin x \left(-\sin^2 x + 3 \cos x = 1\right). \end{aligned}$$

Pro $x_0 = 0$:

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0.$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{0}{1!}(x-0) + \frac{-1}{2!}(x-0)^2 + \frac{0}{3!}(x-0)^3 = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

7. Napište Taylorův polynom 3. stupně se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci $f(x) = \arctan x$.
Řešení:

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x, \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, \\ f''(x) &= -\left(1+x^2\right)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \\ f'''(x) &= \frac{-2 \cdot (1+x^2)^2 - (-2x) \cdot 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2\,(1+x^2)\,(1+x^2-4x^2)}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{-2\,(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

Pro $x_0 = 0$:

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = -2.$$

$$T_3(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{-2}{3!}(x-0)^3 = x - \frac{1}{3}x^3.$$