1. Vypočítejte statický moment kruhu o poloměru r, vzhledem k jeho tečně, je-li jeho hustota $h(x,y)=1$

Pro nejsnadnější výpočet je vhodné tečnu umístit do některé z os. V našem případě umístíme tečnu do osy y.

$$U_y(M)=\iint\limits_M x\,h(x,y)\,dx\,dy$$

Pro kružnici, která je posunuta na ose x a má obecnou rovnici $(x-a)^2+y^2=a^2$, máme v polárních souřadnicích $(x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi)$ meze:
$-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},\quad 0\leq\rho\leq 2a\cos\varphi$.
Jelikož děláme transformaci dvojného integrálu do polárních souřadnic, nesmíme zapomenout na jakobián transformace $\mid J\mid=\rho$.

$$U_y(M)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho\cos\varphi\,\rho\,d\rho=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\cos\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho^2\,d\rho=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\cos\varphi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2a\cos\varphi}=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,8a^3\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{8}{3}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi=$$

Využijeme vzorce: $\cos^2\varphi=\frac{1+\cos 2\varphi}{2}$

$$=\frac{8}{3}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=\frac{8}{12}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{2}{3}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1+2\cos 2\varphi+\left(\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)\right]d\varphi=\frac{2}{3}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{2}{6}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2+4\cos 2\varphi+1+\cos 4\varphi)\,d\varphi=\frac{2}{6}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3+4\cos 2\varphi+\cos 4\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\,d\varphi+\frac{a^3 4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\varphi\,d\varphi+\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\varphi\,d\varphi=$$

$$=a^3[\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{a^3 4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\varphi\,d\varphi\begin{bmatrix}2\varphi=t\\2d\varphi=dt\\d\varphi=\frac{dt}{2}\end{bmatrix}_{-\pi}^{\pi}+\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\varphi\,d\varphi\begin{bmatrix}4\varphi=q\\4d\varphi=dq\\d\varphi=\frac{dq}{4}\end{bmatrix}_{-2\pi}^{2\pi}=$$

$$=a^3\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{a^3 4}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\,\frac{dt}{2}+\frac{a^3}{3}\int_{-2\pi}^{2\pi}\cos q\,\frac{dq}{4}=$$

$$=\pi a^3+\frac{a^3 2}{3}\Big[\cos(\pi)-\cos(-\pi)\Big]+\frac{a^3}{3}\Big[\cos(2\pi)-\cos(-2\pi)\Big]=\pi a^3+\frac{a^3 2}{3}(-1+1)+\frac{a^3}{3}(1-1)=$$

$$=\pi a^3\ \text{kg}\cdot\text{m}$$

2. Vypočítejte statický moment obdelníka o stranách a a b vzhledem ke straně a. Pro snadnější výpočet budeme předpokládat, že strana a leží na ose x. Meze obdelníka budou $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$. Potom statický moment vzhledem k ose x je následující, $h(x, y) = 1$:

$$U_x(M) = \iint\limits_M y\, h(x,y)\, dx\, dy$$

$$U_x(M) = \int_0^a dx \int_0^b y\, h(x,y)\, dy = h(x,y) \int_0^a \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b dx = h(x,y)\, \frac{b^2}{2} \int_0^a dx =$$
$$= h(x,y)\, \frac{b^2}{2}\, [x]_0^a = \frac{ab^2}{2} \text{ kg} \cdot \text{m}$$

3. Vypočítejte souřednice těžiště plochy, která je omezena parabolou $y = x^2$ a přímkou $y = x$. Meze takové oblasti můžeme popsat jako $0 \leq x \leq 1$ a $x^2 \leq y \leq x$. Předpokládáme rovněž, že $h(x, y) = 1$. Rovnice pro výpočet těžiště $T[x_t, y_t]$ jsou:

$$x_t = \frac{\iint\limits_M x\, h(x,y)\, dx\, dy}{\iint\limits_M h(x,y)\, dx\, dy} \qquad y_t = \frac{\iint\limits_M y\, h(x,y)\, dx\, dy}{\iint\limits_M h(x,y)\, dx\, dy}$$

x_t :

$$\iint\limits_M x\, h(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x\, dy = \int_0^1 [xy]_{x^2}^x\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}$$

$$\iint\limits_M h(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$x_t = \frac{\iint\limits_M x\, h(x,y)\, dx\, dy}{\iint\limits_M h(x,y)\, dx\, dy} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

y_t :

$$\iint\limits_M y\, h(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x y\, dy = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{15}$$

$$\iint\limits_M h(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$y_t = \frac{\iint\limits_M y\, h(x,y)\, dx\, dy}{\iint\limits_M h(x,y)\, dx\, dy} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Souřadnice těžiště budou tedy $T\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right]$.

4. Vypočítejte moment setrvačnosti půlkružnice $x^2 + y^2 = a^2$ vzhledem k jejímu průměru. Průměr kružnice budeme brát na ose x, bude tedy opět posunuta a bude mít rovnici $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, v polárních souřadnicích $(x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi)$ jsou meze: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $\quad 0 \le \rho \le 2a\cos\varphi$. Opět předpokládáme, že $h(x,y) = 1$.
Moment setrvačnosti vzhledem k ose x tedy bude:

$$I_x(M) = \iint\limits_M y^2\, h(x,y)\, dx\, dy$$

Po převedení do polárních souřadnic:

$$I_x(M) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} (\rho\sin\varphi)^2\, \rho\, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} \rho^3 \sin^2\varphi\, d\rho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2a\cos\varphi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16a^4\cos^4\varphi\, \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{16a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, \sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, \sin^2\varphi\, d\varphi = 4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, (1-\cos^2\varphi)\, d\varphi = 4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\varphi - \cos^6\varphi)\, d\varphi = \cdots$$

$$\cdots = 4a^4\left[\frac{3}{8}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{1}{32}\sin 4\varphi - \left[\frac{1}{6}\cos 5\varphi\sin\varphi + \frac{5}{6}\left(\frac{3}{8}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{1}{32}\sin 4\varphi\right)\right]\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4a^4\left[\frac{3\pi}{16} + 0 + 0 - \left[0 + \frac{5}{6}\left(\frac{3\pi}{16} + 0 + 0\right)\right] - 0\right] = 4a^4\left(\frac{3\pi}{16} - \frac{5}{6}\frac{3\pi}{16}\right) = 4a^4\frac{3\pi}{16}\left(1 - \frac{5}{6}\right) =$$

$$= a^4\frac{3\pi}{4}\left(1 - \frac{5}{6}\right) = a^4\frac{3\pi}{4}\frac{1}{6} = \frac{\pi a^4}{8}\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$$